TP 7 : oscillateur de torsion

Objectif : étude des oscillations libres et forcées d'un pendule de torsion

1 Principe général

1.1 Définition

Un pendule de torsion est constitué par un fil large (métallique) enroulé dans un même plan autour de son axe de fixation (figure ??). Il décrit des mouvements oscillatoires d'enroulement et de déroulement autour de cet axe ; on parle parfois de "ressort en spirale".

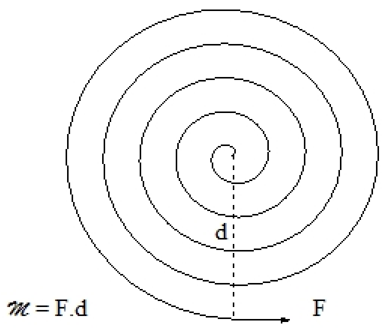

FIGURE 1 – Oscillateur de torsion et moment de force

Remarque Ce dispositif n'est pas un pendule dans le sens où il ne dépend pas de la gravité ; mais les équations décrivant le mouvement sont identiques à celles d'un pendule (linéaire).

1.2 Principe

On se propose d'étudier les oscillations libres amorties et les oscillations forcées pseudo-périodiques et critiques.

1. Si un système oscillant est laissé libre de se mouvoir, on observe que la décroissance des maxima d'amplitude (θ_a) successifs dépend beaucoup de l'amortissement.
   Plusieurs cas sont à distinguer en régime libre :
   – Cas non amorti où on néglige les frottements et où on n'applique pas de frein. On détermine la fréquence propre f_0 (et la période propre T_0) ;
   – Cas amorti pseudo-périodique où l'amortissement est faible ;
   – Cas critique ;
   – Cas apériodique (d'intérêt moindre).

2. Pour le pendule de torsion, si on force son mouvement avec un couple de torsion périodique extérieur, on observe que (θ_a) dépend de la fréquence f d'excitation (et aussi de l'amplitude du couple extérieur appliqué et de l'amortissement mais cela a moins d'intérêt).
   On étudie ainsi le phénomène de résonance de l'oscillation du pendule.

1.3 Grandeurs physiques utilisées

- Angle de rotation du pendule de torsion (θ) ;
- Maximum d'amplitude des oscillations (θ_a) ;
- Vitesse angulaire ($\dot{\theta}$) ;
- Fréquence (f) d'excitation (variable) ;
- Fréquences propre (f_0) et de résonance (f_r) (constantes) ;
- Moment d'un couple de torsion ($\overrightarrow{\mathcal{M}}$)* ;
- Décrément logarithmique (Λ).

* Le moment d'un couple mesure l'effet rotatoire de 2 forces opposées mais égales et ne s'appliquant pas au même point ; $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est un vecteur dont la direction est l'axe de rotation et dont la norme est l'une des 2 forces multipliée par la distance à l'axe.

2 Modèle théorique

La grandeur physique étudiée en fonction du temps est θ (c'est le degré de liberté du système). Le premier objectif est d'obtenir l'équation horaire $\theta(t)$.

Quelque soit le régime étudié (libre ou forcé) deux couples de torsion interviennent :

- Celui du pendule (le couple de rappel) de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ avec $\mathcal{M}_1 = -C\theta$ où C est la constante de torsion du pendule (moment par unité d'angle) (équivalent à k, constante de raideur d'un ressort).
- Celui de l'amortissement de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ avec $\mathcal{M}_2 = h\dot{\theta}$ où h est un facteur de proportionnalité dépendant du courant (de Foucault) de freinage.

2.1 Oscillations libres

On donne au pendule un angle de torsion θ_0 initial et on le lâche sans vitesse initiale.
On veut tout d'abord déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement, on utilise le théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}$.

On appelle J le moment d'inertie du solide, c'est à dire la répartition de masse autour de son centre d'inertie. Cette grandeur s'apparente, pour ce qui est la rotation, à la masse en ce qui concerne la translation. J traduit l'inertie de rotation du corps.

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$J\,\ddot{\theta} + h\,\dot{\theta} + C\,\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0 \tag{1}$$

On peut la noter de la façon suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\,\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \tag{2}$$

avec $\left|\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{h}{2J} \text{ le coefficient d'amortissement ;} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J}} \text{ la pulsation des oscillations.} \end{array}\right.$

Cette équation est bien connue, on la retrouve dans tout système oscillant en évolution libre, mécanique ou électrique.

Voyons les différentes solutions possibles pour cette équation différentielle :

2.1.1 Régime pseudo-périodique (cas le plus intéressant)

Mise à jour :
Le coefficient d'amortissement est noté λ.
δ n'existe pas.

Si $\lambda^2 < \omega_0^2$ alors $\theta(t) = \theta_0\, e^{-\lambda\, t} \cos(\omega\, t + \phi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ la pseudo-pulsation des oscillations.
La période des oscillations est donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Si on note τ la constante de temps (ou constante de relaxation) du système définie par $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.
On peut exprimer la pseudo-période des oscillations en fonction de la période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{1}{\tau^2}}}} \qquad (3)$$

Les oscillations ont donc la forme suivante :

Dans le cas où les conditions initiales sont les suivantes :
$\theta_0 = \theta_{t=0} = \theta_{max}$
$\dot{\theta}_{t=0} = 0$.

On définit le décrément logarithmique par :

$$\boxed{\Lambda = \ln\left[\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right]} \qquad (4)$$

et on montre que $\boxed{\Lambda = \lambda\, T}$.

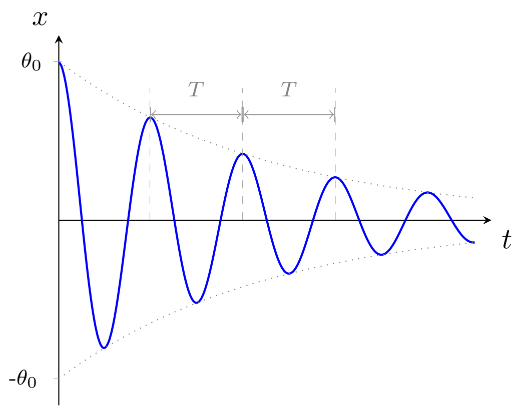

FIGURE 2 – Pseudo-période des oscillations

2.1.2 Régime critique

Lorsque $\lambda^2 = \omega_0^2$, le pendule retourne dans un minimum de temps à sa position d'équilibre, **sans osciller** : il n'existe pas de valeurs négatives pour θ.

Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est $\theta = \theta_0 e^{-\lambda\, t}(1 + \lambda\, t)$ donc :
Pour $t = \dfrac{1}{\lambda}$, $\theta = 2\, \theta_0\, e^{-1}$.
On peut alors déterminer $\dfrac{1}{\lambda}$ graphiquement.

2.1.3 Cas apériodique

Lorsque $\lambda^2 > \omega_0^2$, le pendule retourne asymptotiquement à sa position d'équilibre.

2.2 Oscillations forcées

On applique au pendule un couple de torsion périodique de moment $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0\, \cos(\omega\, t)$, de pulsation ω, donc de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + 2\,\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A\,\cos(\omega\,t) \quad \text{où } A \text{ est une constante.} \tag{5}$$

En régime forcé (lorsque le régime transitoire est négligeable), la solution de cette équation est $\theta(t) = \theta_{\mathrm{a}}\,\cos(\omega\,t + \phi)$ avec θ_{a} l'amplitude des oscillations qui dépend (comme ϕ) de la pulsation ω imposée.

Remarque On montre que $\phi < 0$: la réponse de l'oscillateur est ici toujours en retard sur l'excitation.

Il est à noter que si les frottements sont négligeables, le régime forcé est long à s'établir, il se produit un phénomène de battements (régime transitoire).

3 Dispositif expérimental

3.1 Montage à effectuer

1. Pour recueillir le mouvement oscillant du pendule, on utilise un transducteur de mouvement : un fil attaché au disque fixé au pendule passe dans un transducteur. Ce transducteur traduit les mouvements à l'aide d'une interface puis d'un logiciel.
   L'exploitation du TP se fait donc sur des courbes fournies par l'ordinateur.

2. Pour obtenir un couple de torsion périodique extérieur, on utilise un moteur continu (excitateur) qui met un axe en rotation et par suite, il met un autre axe en oscillation qui va stimuler le pendule (résonateur) ; les sorties latérales (les deux fiches sont alignées verticalement) de l'alimentation sont connectées aux douilles de raccordement du moteur.

3. Pour obtenir différentes valeurs d'amortissements, on utilise le freinage par courant de Foucault.
   Ces courants nécessitent aussi une tension continue (plutôt une source de courant), les sorties centrales (les deux fiches sont alignées horizontalement) de l'alimentation sont connectées à l'entrée de l'électro-aimant (2 bobines représentées par les deux rectangles de part et d'autre de l'ellipse) entourant le disque de freinage, via l'ampèremètre.
   L'unique bouton de réglage de l'alimentation permet de choisir le courant (I_{h}). Ce courant alimentant l'électro-aimant est indiqué par un ampèremètre placé en série dans le circuit.

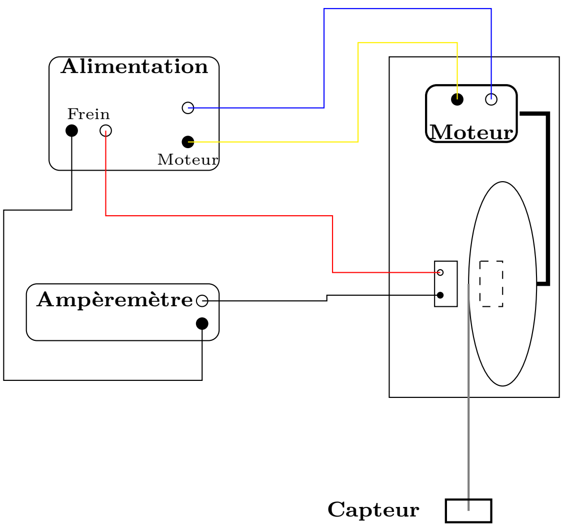

FIGURE 3 – Montage et branchements

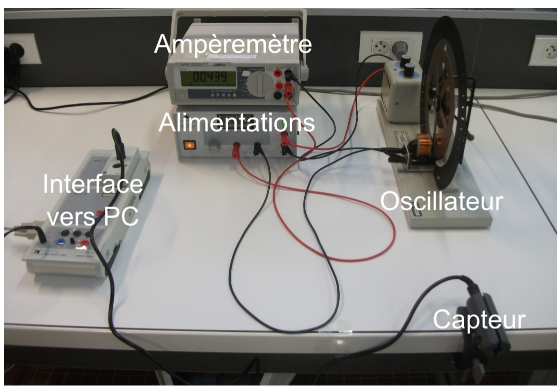

FIGURE 4 – Photo du montage

Vérifier que le montage est correctement effectué.

3.2 Protocole expérimental (à lire uniquement)

3.2.1 Oscillations libres

1. Le moteur ne doit pas être utilisé ; seul le circuit d'alimentation de l'électro-aimant est indispensable ;
2. On repère la position d'équilibre (pendule immobile) et on fait le zéro sur le graphe de l'ordinateur ; faire le 0 est ici important (et il faudra le vérifier, ou le refaire, régulièrement) ;
3. On écarte le pendule de sa position d'un angle d'environ 50° (angle θ_0), pas plus ; en même temps, on lance l'enregistrement de la courbe et on lâche le pendule : ne pas tirer sur le fil mais utiliser le repère blanc pour écarter le pendule ;
4. Enfin, quand on juge que l'enregistrement est suffisant on le stoppe.

3.2.2 Oscillations forcées

1. On choisit la fréquence f de rotation du moteur à l'aide du potentiomètre du moteur (2 boutons notés "grob" pour réglage gros et "fein" pour réglage fein) ;
2. On lit la fréquence imposée f après enregistrement, sur la courbe avec la lecture de la période (ne pas se fier aux graduations des potentiomètres) ;
3. Cette fréquence imposée par le moteur moteur peut être vérifiée en utilisant un chronomètre : on se met dans une direction perpendiculaire au plan du pendule est on observe le repère blanc situé sur la "roue" du moteur ; on compte le temps qui s'écoule pour 10 tours de roue.
4. Près de la résonance (maximum d'amplitude du pendule de torsion, il vient en butée), on modifie f faiblement en utilisant le potentiomètre "fein".
5. Pour chaque courbe, ici, il n'est pas important de faire le 0 : on mesure les valeurs crête à crête et on divise par 2 pour avoir l'amplitude ; on lance l'enregistrement et quand on juge que celui-ci est suffisant on le stoppe.

3.2.3 Gestion du logiciel

Il faut suivre la notice mis à disposition avec le matériel.
Le réglage des "paramètres de mesures" est important : il faut les choisir de façon à avoir la courbe la plus lisse possible, on peut jouer sur le nombre de points et/ou l'intervalle entre les points (la durée d'acquisition dépendra de ces deux paramètres).

Remarque
La courbe obtenue lors des oscillations forcées n'est pas une sinusoïde mais présente une échancrure qui revient régulièrement : ceci est un défaut du système d'enregistrement (observer le montage à la résonance pour comprendre ce qu'il se passe), cela n'empêche pas la mesure de la fréquence à la résonance.

4 Manipulations

4.1 Étude de l'amortissement en régime libre

4.1.1 Cas où $I_h = 0.5\,\mathrm{A}$, $\theta_0(t = 0) \simeq 50°$

1. ♠ Enregistrer la courbe $\theta(t)$, l'imprimer.
2. ♠ Déterminer la pseudo-période des oscillations (avec deux chiffres après la virgule) à l'aide du logiciel : faire un clic droit sur la fenêtre de la courbe et choisir "afficher les coordonnées". Prendre deux points et faire la différence de leur abscisse (réfléchir aux points à prendre pour effectuer cette mesure).

Remarque
Les "paramètres de mesures" que vous avez choisis pour régler l'acquisition influent sur le nombre de chiffres donnés par le "afficher les coordonnées".

3. ♠ Toujours à l'aide de la même fonction (clic droit puis "afficher les coordonnées), mesurer deux amplitudes séparées d'une pseudo-période T et en déduire une valeur du décrément logarithmique Λ.
   Recommencer cette démarche plusieurs fois avec d'autres amplitudes et en déduire une valeur moyenne de Λ.
4. ♠ En déduire par calcul le coefficient d'amortissement λ.
5. ♠ Déterminer enfin par le calcul la période propre T_0 des oscillations. Aller jusqu'à trois chiffres après la virgule.

4.1.2 Régime critique

1. Rechercher la valeur de I_{h} (en observant le signal à l'écran) telle que l'on réalise le mieux possible le régime critique (voir définition dans la partie théorique). **Si I_h dépasse 1 A, ne pas rester plus de 10 minutes avec cette valeur (l'électroaimant chauffe trop)**.
2. ♠ Enregistrer la courbe $\theta(t)$, l'imprimer.
3. ♠ Déterminer le coefficient d'amortissement λ dans ce cas.

4.2 Étude du régime forcé

4.2.1 Étude de la résonance de position

1. Régler la fréquence de rotation du moteur jusqu'à détecter la résonance (maximum de θ_{a}) en observant directement le pendule : il vient en butée s'il est à la résonance pour $I_{\mathrm{h}} = 0$.
2. ♠ Pour cette fréquence de résonance f_{r}, enregistrer la courbe $\theta(t)$ pendant un temps adéquat et mesurer T_{r} la période puis calculer la fréquence f_{r} de résonance de position.

   (On rappelle que la courbe "n'est pas jolie" mais que cela ne modifie en rien les mesures)

4.2.2 Observation de la vitesse

1. Pour $I_h = 0.5\,\mathrm{A}$, choisir une fréquence f donnant des oscillations d'amplitude ni trop forte ni trop faible (attendre un certain temps que le phénomène de battements (régime transitoire) disparaisse.
2. ♠ Enregistrer la courbe $\theta(t)$ pendant un temps adéquat puis, avec le logiciel, calculer la grandeur $\dot{\theta}$ (voir notice) et tracer la courbe $\dot{\theta}(t)$.
3. ♠ Imprimer un graphique rassemblant les deux courbes $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
4. ♠ A l'aide de l'outil réticule (clic droit puis "afficher les coordonnées"), calculer le déphasage noté α de la courbe $\dot{\theta}(t)$ par rapport à la courbe $\theta(t)$:
   Si l'écart temporel entre les deux courbes est Δt alors $\alpha = \dfrac{\Delta t}{T} \times 360$, avec α en °.
5. ♠ Comparer ce déphasage expérimental au déphasage théorique qui est de $\pm 90°$.

4.3 Étude dans l'espace des phases

4.3.1 Régime libre

1. Choisir $I_{\mathrm{h}} = 0.2\,\mathrm{A}$, enregistrer la courbe $\theta(t)$ puis faire apparaître la courbe $\dot{\theta}(\theta)$ à l'aide du logiciel ($\dot{\theta}$ en ordonnée, θ en abscisse.

2. ♠ Imprimer cette courbe.

3. ♠ A quelles valeurs de θ correspondent les maxima de $\dot{\theta}$? A quelles valeurs de $\dot{\theta}$ correspondent les maxima de θ ?

4.3.2 Régime forcé

1. Choisir $I_h = 0.5\,\mathrm{A}$ et une fréquence du moteur de façon à ce que les oscillations soient d'amplitude ni trop forte ni trop faible.

2. ♠ Enregistrer et imprimer la courbe $\dot{\theta}(\theta)$.

3. ♠ A quelles valeurs de θ correspondent les maxima de $\dot{\theta}$? A quelles valeurs de $\dot{\theta}$ correspondent les maxima de θ ?

4. ♠ Comparer et commenter les deux courbes $\dot{\theta}(\theta)$ obtenues en régime libre et en régime forcé.