Cours de mécanique
M23-Changement de référentiel référentiel non galiléen

Table des matières

1 Introduction

Pour le moment en mécanique, l'étude des mouvements s'est fait par rapport à un référentiel dans lequel les lois (de Newton par exemple) sont valables : un référentiel de type galiléen.
Nous allons voir ici comment faire dans le cas où le référentiel d'étude est en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen : la modification des lois pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel d'étude fera apparaître de nouveaux termes spécifiques à ces problèmes.

2 Formule de Varignon et lois de composition

2.1 Définition

La **formule de Varignon** (mathématicien français du 17$^{\text{ème}}$ siècle) permet de relier la variation dans le temps d'un vecteur dans un référentiel $\mathcal{R}$ fixe avec celle de ce même vecteur dans un référentiel $\mathcal{R}'$, en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{U}} \tag{1}$$

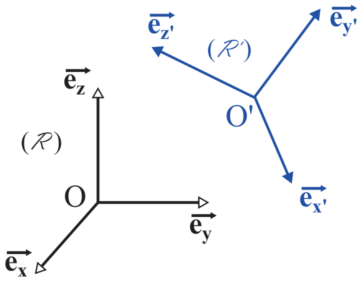

FIGURE 1 – Référentiel $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Le mouvement quelconque de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est la composition :
- d'un mouvement de translation (que l'on caractérisera par $v(O')_{/\mathcal{R}}$) ;
- et d'un mouvement de rotation caractérisé par $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ (vecteur rotation).

2.2 Loi de composition des vitesses

La formule de Varignon peut s'appliquer à n'importe quel vecteur, notamment au vecteur vitesse d'un point M.
Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{2}$$

Donc :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \tag{3}$$

En appliquant la formule de Varignon au vecteur $\overrightarrow{O'M}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\
\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} \\
\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} &= \overrightarrow{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \\
\overrightarrow{v}_{\text{absolue}} &= \overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} + \overrightarrow{v}_{\text{relative}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Explicitons les adjectifs de vitesse utilisés :
- La vitesse absolue est la vitesse de M dans le référentiel fixe ($\mathcal{R}$).
- La vitesse relative est la vitesse de M dans le référentiel en mouvement ($\mathcal{R}'$).
- La vitesse d'entrainement est la vitesse qu'aurait M s'il était fixe dans le référentiel en mouvement.

2.3 Loi de composition des accélérations

Si on dérive la loi de composition des vitesses par rapport au temps dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$, on obtient la loi de composition des accélérations, qui s'écrit :

$$\overrightarrow{a}_{\text{absolue}} = \overrightarrow{a}_{\text{relative}} + \overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} + \overrightarrow{a}_{\text{coriolis}} \tag{5}$$

Avec :
- $\overrightarrow{a}_{\text{absolue}}$ l'accélération du point M dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}}$.
- $\overrightarrow{a}_{\text{relative}}$ l'accélération du point M dans le référentiel en mouvement $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$.
- $\overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} = \overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \dfrac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})$,
  l'accélération qu'aurait le point M s'il était fixe dans $\mathcal{R}'$.
  Attention, $\overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} \neq \dfrac{d\overrightarrow{v}_{\text{entrainement}}}{dt}$.
- $\overrightarrow{a}_{\text{coriolis}} = 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ (Coriolis, ingénieur français, $19^{\text{ème}}$ siècle).

3 Simplification des lois de composition dans le cas de mouvements particuliers de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

Ces formules sont complexes, mais dans le cas où l'on a uniquement translation, ou uniquement rotation, les expressions se simplifient :

3.1 Cas d'un mouvement de translation

Dans ce cas, $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} = v(O')_{/\mathcal{R}} \quad ; \quad \overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} = a(O')_{/\mathcal{R}} \quad ; \quad \overrightarrow{a}_{\text{coriolis}} = \overrightarrow{0} \tag{6}$$

3.2 Cas d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

On considère que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour de son axe $\overrightarrow{e_{z'}}$ confondu avec $\overrightarrow{e_z}$. O et O' sont confondus.
On a donc $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

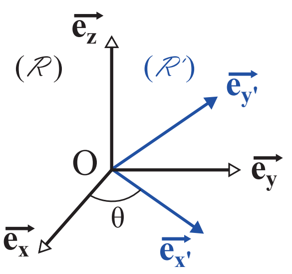

FIGURE 2 – Rotation uniforme de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

Soit un point M repéré dans le référentiel $\mathcal{R}'$ par $\overrightarrow{O'M} = r\,\overrightarrow{e_{x'}} + z\,\overrightarrow{e_{z'}}$.
Calculons la vitesse d'entraînement :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} && (7)\\
&= \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} && (8)\\
&= \dot{\theta}\overrightarrow{e_{z'}} \wedge (r\overrightarrow{e_{x'}} + z\overrightarrow{e_{z'}}) && (9)\\
&= r\dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}} && (10)
\end{aligned}$$

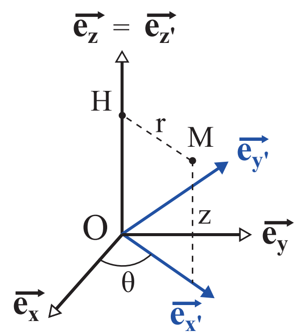

FIGURE 3 – Repérage d'un point M lors d'une rotation uniforme

Calculons l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} &= \overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) && (11)\\
&= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} \quad \text{car } \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{0} \text{ (rotation uniforme)} && (12)\\
&= \dot{\theta}\overrightarrow{e_{z'}} \wedge r\dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}} && (13)\\
&= -r\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_{x'}} && (14)
\end{aligned}$$

On écrit souvent celle-ci en utilisant H, le projeté de M sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{HM}} \tag{15}$$

4 Lois de la physique dans les référentiels non galiléens

4.1 Référentiel galiléen ou non galiléen

Depuis le secondaire, nous savons qu'un référentiel est galiléen si dans celui-ci la première loi de Newton est vérifiée ; et que tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.
Cette dernière affirmation implique que l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis sont nulles dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

4.2 Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen

Soit $\mathcal{R}_g$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel non galiléen. On appelle $\overrightarrow{F}$ la résultante des forces. On a, dans $\mathcal{R}_g$:

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} \tag{16}$$

Or d'après ce que l'on a vu précédemment, on peut écrire :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c \tag{17}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= m\,\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + m\,\overrightarrow{a}_e + m\,\overrightarrow{a}_c && (18)\\
\Longleftrightarrow \overrightarrow{F} - m\,\overrightarrow{a}_e - m\,\overrightarrow{a}_c &= m\,\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} && (19)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m\,\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}} \tag{20}$$

Avec :
$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a}_e$ une force virtuelle appelée force d'inertie d'entraînement ;
$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\,\overrightarrow{a}_c$ une force virtuelle appelée force d'inertie de Coriolis.

Ces deux forces ne sont pas réelles car elles n'existent que dans un référentiel donné. Elles sont nulles dans tout référentiel galiléen.

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe

– Écrivons la relation fondamentale de la dynamique dans le **référentiel galiléen** du laboratoire :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}_g} \tag{21}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = m\,\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}_g} \tag{22}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{T} = m\,\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}_g} \tag{23}$$

On peut projeter cette relation dans la base de Frenet, on a :

$$\text{Sur } \overrightarrow{t} \; : a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ (rotation uniforme)} \tag{24}$$
$$\text{Sur } \overrightarrow{n} \; : a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{T}{m} \tag{25}$$

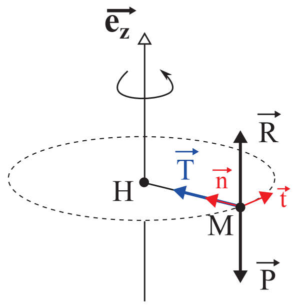

FIGURE 4 – Rotation uniforme vue d'un référentiel galiléen

Si la rotation a pour vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, $v = r\dot{\theta}$, on peut écrire que le point M est retenu sur sa trajectoire circulaire par la force $\overrightarrow{T} = -m\dot{\theta}^2\overrightarrow{HM}$.

– Écrivons maintenant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel tournant lié au point M, **référentiel non galiléen** :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}'} \tag{26}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m\,\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}'} \tag{27}$$

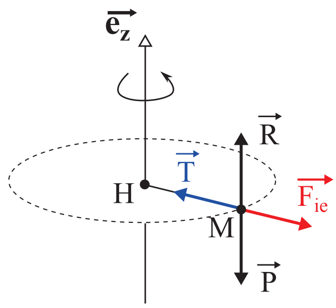

FIGURE 5 – Rotation uniforme vue d'un référentiel non galiléen

On a toujours $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{F_{ic}} = -m\,\overrightarrow{a_c}_{/\mathcal{R}'} = -m\,2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}$; mais le point M n'a pas de vitesse dans $\mathcal{R}'$, donc $\overrightarrow{F_{ic}} = \overrightarrow{0}$.

Enfin de la même manière, si le point M n'a pas de vitesse dans $\mathcal{R}'$, il n'a pas d'accélération, donc $\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$.

Finalement :

$$\overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_{ie}} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = m\dot{\theta}^2\overrightarrow{HM}} \tag{28}$$

Il y a donc équilibre de M **dans le référentiel tournant**. Cette force d'inertie $\overrightarrow{F_{ie}}$ représente la force centrifuge ressentie par M au cours de son mouvement de rotation.

4.3 Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

Basé sur le même principe que l'établissement de la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, on peut écrire le TMC dans ce même référentiel (d'origine O') :

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}})} \tag{29}$$

4.4 Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen

$$\boxed{E_C(B)_{/\mathcal{R}'} - E_C(A)_{/\mathcal{R}'} = W_{AB}(\overrightarrow{F})_{/\mathcal{R}'} + W_{AB}(\overrightarrow{F_{ie}})_{/\mathcal{R}'}} \tag{30}$$

En effet, la force de Coriolis ne travaille pas :
$\overrightarrow{F_{ic}} = 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}$ donc la puissance de cette force $P = \overrightarrow{F_{ic}} \cdot \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'} = 0$ car $\overrightarrow{F_{ic}} \perp \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}$.
Et le travail élémentaire de cette force est $\delta W = P\,dt = 0$ d'où $W_{AB}(\overrightarrow{F_{ic}}) = 0$.

5 Références

– "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
– "Précis Mécanique PCSI" - C.Clerc / P.Clerc - Bréal ;