TD M22 : Forces centrales

Exercice 1 : établissement de l'équation de la trajectoire par la conservation de l'énergie mécanique

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r} \quad (1)$$

A partir de la conservation de cette énergie, on souhaite retrouver l'expression de l'équation polaire de la trajectoire $r = f(\theta)$.

1. Manipuler le premier terme de l'équation (1) pour faire apparaitre la grandeur $\frac{dr}{d\theta}$.
2. En déduire une expression de l'énergie mécanique en fonction de r, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$, C, m et K.
3. Réaliser le changement de variable $u = \frac{1}{r}$, et réorganiser l'expression de E_M précédente afin de montrer que :
$$E_M = \frac{mC^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) + Ku \quad (2)$$
4. Écrire la conservation de l'énergie mécanique $\frac{dE_M}{d\theta} = 0$ et résoudre l'équation obtenue (on note A et θ_0 les constantes).
5. Donner l'équation $r = f(\theta)$ de la trajectoire en fonction de $p = \frac{mC^2}{|K|}$, $e = Ap$ et un paramètre ϵ qui prendra la valeur +1 ou -1 selon le cas ($K > 0$ ou $K < 0$).

Exercice 2 : établissement de l'équation de la trajectoire grâce aux formules de Binet

Les formules de Binet donnent en coordonnées polaires les expressions du carré de la vitesse et l'expression de l'accélération d'un point M soumis à une force centrale.
Nous allons les établir, puis nous en servir pour retrouver l'équation de la trajectoire $r = f(\theta)$.

1. Écrire la vitesse du point M en coordonnées polaires puis son module au carré. Introduire le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ et la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.
Montrer ainsi que :
$$v^2 = C^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \quad (18)$$
2. Faire de même avec l'accélération et montrer que :
$$\overrightarrow{a} = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\overrightarrow{u_r} \quad (19)$$
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M et retrouver l'équation différentielle dont la solution sera l'équation de la trajectoire.

Exercice 3 : satellite en mouvement quasi-circulaire

Soit un satellite artificiel en mouvement autour de la Terre. On suppose que le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation terrestre, on note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite et G la constante de gravitation universelle.

1. Choisir le référentiel d'étude adéquat.
2. Établir la conservation du moment cinétique du satellite.
3. En déduire que le mouvement du satellite est plan.
4. Donner l'expression du moment cinétique du satellite en fonction de la constante des aires dont on donnera l'expression.
5. En déduire, dans le cas du mouvement circulaire, l'uniformité du mouvement.
6. Établir l'expression de la vitesse du satellite en fonction de G, M_T et r le rayon de son orbite.
7. Établir l'expression de l'énergie cinétique du satellite en fonction de G, M_T, m et r.
8. Établir l'expression de l'énergie potentielle du satellite, la relier à E_C (on prendra l'origine des énergies potentielles à l'infini).
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite et donner sa relation à E_C et à E_P.

Exercice 4 : orbite de transfert et satellite géostationnaire

Pour mettre un satellite géostationnaire en orbite, on utilise un lanceur (type Ariane 5) qui libère le satellite au périgée d'une orbite elliptique de transfert. Le satellite parcourt l'orbite de transfert jusqu'à son apogée qui coïncide avec un point de l'orbite géostationnaire. La mise en marche d'un moteur du satellite lui permet alors de se positionner sur la trajectoire géostationnaire.

1. Rappeler ce qu'est un satellite géostationnaire.
2. Sachant que l'orbite géostationnaire est quasi-circulaire, que l'on note h_g l'altitude de cette orbite, h_0 l'altitude du périgée de l'orbite de transfert, a son demi-grand axe et R_T le rayon de la Terre ; faire un schéma représentant la mise en orbite et faire apparaitre les grandeurs citées.
3. Calculer la vitesse angulaire Ω_g du satellite sur son orbite géostationnaire.
4. Déterminer les expressions :
   - Du rayon R_g de la trajectoire géostationnaire ;
   - De son altitude h_g ;
   - De sa vitesse v_g.

   Puis effectuer les applications numériques.
5. D'après les données de l'énoncé, trouver la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse de transfert, de son excentricité e (il faudra utiliser les expressions de r_p) et de son paramètre p.

6. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au satellite, on montre que l'équation polaire de sa trajectoire sur l'orbite de transfert est :

$$r = \frac{\frac{C^2}{GM_T}}{1 + A\frac{C^2}{GM_T}\cos\theta} \tag{46}$$

Identifier dans cette expression le paramètre p et le paramètre e de l'ellipse de transfert ; puis exprimer la constante des aires en fonction de p, G et M_T.

7. En déduire, sachant que sur l'orbite de transfert, la vitesse est orthoradiale au périgée et à l'apogée de celle-ci, la vitesse du satellite en ces deux points.
8. A l'aide de la troisième loi de Kepler, calculer le temps que passe le satellite sur cette orbite de transfert.

Données

- Période de rotation de la Terre : $T_0 = 86164\,\mathrm{s}$;
- Masse de la Terre : $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$;
- Rayon de la Terre : $R_T = 6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}$;
- Masse du satellite : $m = 700\,\mathrm{kg}$;
- altitude du périgée de l'orbite de transfert : $h_0 = 200\,\mathrm{km}$;
- Constante de gravitation : $G = 6.67 \times 10^{-11}$ SI.

Références

- "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
- "Précis Mécanique PCSI" - C.Clerc / P.Clerc - Bréal ;